емой. Амплитуды радиосигналов, принимаемых антенной от передатчиков, одинаковы.При одновременной работе передатчиков мощность принимаего сигнала меняется в очень широких пределах. Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течении которого мощность принимаемого сигнала составляет менее 1/1000 среднего значения принимаемой мощности. Отражением радиосигналов от земли пренебречь.

Р.Александров

Решение задач M1451-1460,

Решение задач M1451-1460,Ф1468-1477

М1451.Даны натуральные числа a и b такие, что чис-

ло (a+1)/b+(b+1)/a является целым. Докажите, что на-

ибольший общий делитель чисел a,b не превосходит

числа sqrt(a+b).

Пусть d - наибольший общий делитель чисел a и b.

Так как

Формула

и ab делится на d^2, то a^2+b^2+a+b делится на d^2. Чис-

ло a^2+b^2 также делится на d^2. Поэтому а+b делится на

d^2 и sqrt(a+b) >=d.

A.Голованов, Е.Малинникова

М1452.Окружности S и S касаются внешним обра-

зом в точке F. Прямая l касается S и S в точках А и

В соответственно. Прямая, параллельная прямой l ,

касается S в точке С и перекает S в точках D и E.

Докажите, что а)точки A, F и C лежат на одной пря-

мой; б) общая хорда окружностей, описанных около

треугольников ABC и BDЕ, проходит через точку F.

а)Первое решение. Так как касательные к окружности

S в точках В и С параллельны, то ВС = ее диаметр, и

ВFC = 90 .Докажем, что и AFB = 90 .Проведем че-

рез точку F общую касательную к окружностям(см.ри-

сунок), пусть она пересекает прямую l в точке K.Из ра-

венства отрезков касательных, приведенных к окружнос-

ти из одной точки, следует, что треугольник AKF и

BKF равнобедренные. Следовательно,

Формула

Рисунок

Второе решение. Рассмотрим гомотетию с центром F и

коэффициентом, равным –r/r ,где r и r – радиусы

окружностей S и S. При этом гомотетии S переходит

в S, а прямая l – касательная к S . Следователь-

но, точка А переходит в точку С, поэтому точка F лежит

на отрезке AC

б) Ниже мы покажем, что центр окружности BDE нахо-

дится в точку А. Посколько центр окружности АBC есть

середина AC(ABC=90), a BFC=90 (cм.первое

решение п. а)), отсюда будет следовать, что BF есть пер-

пендикуляр, опущенный из общей точки окружностей

BDE и ABC на прямую, соединяющею их общую хорду.

Итак, нам достаточно доказать, что AD=AE=AB. Первое

Из этих равенств очевидно(ибо касательная к S в точке

А параллельна DE). Пусть r и r – радиусы S и S.

Опуская перпендикуляр АP на DE, найдем, что

AP=BC=2r , и по теореме Пифагора для треугольников

APD и OPD , где О – центр S ,

Формула

Формула. Но легко найти, что общая ка-

сательная АB окружностей S и S равна 2sqrt(rr).

А.Калинин, В.Дубровский

М1453. Существует ли квадратный трехчлен P(х) с

целыми коэффициентами такой, что для любого нату-

рального числа n, в десятичной записи которого учас-

твуют одни единицы, число P(n) также записывается

одними единицами?

Ответ: существует.

Рассмотрим квадратный трехчлен

Формула

Если n=11…11, то 9n + 2 =100…001.

Следовательно, P(n)=11…11·100…001=11…11.

Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет усло-

вию.

А.Перлин

М1454. Прямоугольник m×n разрезан на уголки:

Рисунок

Докажите, что разность между количеством уголков

вида a и количеством уголков вида b делится на 3.

Ясно, что если прямоугольник m×n разрезан на угол-

ки, то mn делится на 3.Расставим в клетках прямоу-

гольниках числа так, как показано на рисунке.

Рисунок

Сумма всех этих чисел равна mn(m+n)/2. Cумма чисел,

стоящих в уголке вида а, дает при делении на 3 остаток

2;сумма чисел, стоящих в уголке вида b, - остаток 1

(или, что то же самое, -2); сумма чисел, стоящих в

уголках вида с и d, делятся на 3. Если n и n – коли-

чества уголков вида a и вида b соответственно, то сумма

всех чисел в прямоугольнике имеет вид 3N + 2(n-n),

где N – некоторое целое число. Из равенства